VJEŽBE IZ MATEMATIKE 2

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 12

Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

Obične diferencijalne jednadžbe

Uvodni pojmovi

Diferencijalne jednadžbe su jednadžbe oblika:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

(ovdje je $y = y(x)$), dakle one koje sadrže osim same funkcije $y(x)$ i njezine derivacije.

Primjer 1 Dane su diferencijalne jednadžbe prvog, drugog i četvrtog reda:

a) $y' + 2xy - y^3 = 0$,

b) $xy'' + \frac{x}{\ln y} - 2\sin x = 0$,

c) $y^{(4)} - 2y'' + \sqrt{y + 3x} = 0$.

Iz primjera je jasno da je red diferencijalne jednadžbe jednak najvećem stupnju derivacije koja se u jednadžbi pojavljuje. Neka funkcija predstavlja rješenje diferencijalne jednadžbe ako ju zadovoljava, tj. ako kad uvrstimo odgvarajuće parametre s lijeve strane (1) s desne zaista dobijemo nulu.

Primjer 2 Provjerite da je funkcija $y(x) = 5x^2$ rješenje sljedeće diferencijalne jednadžbe: $xy' = 2y$.

Rješenje: Imamo $xy' - 2y = 0$. U našem primjeru je $y'(x) = 10x$. Sada uvrštavamo naše funkcije u jednadžbu:

$$xy' - 2y = x \cdot 10x - 2 \cdot 5x^2 = 10x^2 - 10x^2 = 0$$

pa je $y = 5x^2$ zaista rješenje dane dif. jednadžbe.

Zadatak 1 Provjerite da li su navedene funkcije rješenja zadanih dif. jednadžbi:

a) $y'' = y^2 + x^2$, $y(x) = \frac{1}{x}$,

b) $y'' + y = 0$, $y(x) = 3\sin x - 4\cos x$,

c) $y'' - 2y' + y = 0$, $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = x^2e^x$

d) $(x + y)dx + xdy = 0$, $y(x) = \frac{C^2 - x^2}{2x}$

Napomena: Kao i uvijek, vrijedi $y' = \frac{dy}{dx}$ i to tako shvaćamo pa je npr $y' + x^2 = y$ isto što i $dy + x^2dx = ydx$.

Ako je zadana neka diferencijalna jednadžba, grafove njenih rješenja nazivamo **integralnim krivuljama**. Ponekad su zadane porodice krivulja i zanima nas koja je njihova pripadna dif. jednadžba. Nju nalazimo tako da jednadžbu zadane porodice deriviramo dok ne dođemo u mogućnost konstante izrazimo preko $x, y, y', y'', \ldots$ i time jednadžba familije krivulja postane oblika (1). Dakle, moramo derivirati onoliko puta koliko imamo nezavisnih konstanti.

Primjer 3 Nađite diferencijalnu jednadžbu porodice parabola zadane s $y(x) = Cx^2$. Skicirajte tu porodicu.

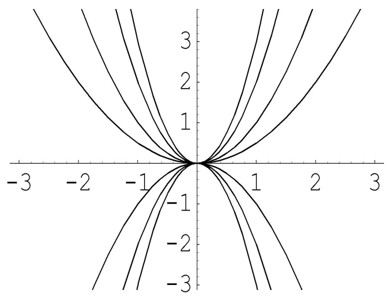
Rješenje: Tražimo prvo dif. jednadžbu, deriviramo jedanput (jer je jedna konstanta) pa imamo:

$$y'(x) = 2Cx \quad \Rightarrow \quad C = \frac{y'}{2x}$$

Sada to uvrštavamo u početnu jednadžbu naših krivulja da se riješimo konstante i dobivamo izraz:

$$y = \frac{y'}{2x}x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{y'x}{2}$$

što je tražena diferencijalna jednadžba te familije krivulja. Riječ je očito o svim parabolama s tjemenom u ishodištu:



Zadatak 2 Odredite diferencijalne jednadžbe sljedećih familija krivulja i skicirajte te familije:

a) $y(x) = Cx$,

b) $y(x) = C_1(x - C_2)^2$,

c) $y(x) = Ce^x$,

d) $x^2 + y^2 = C$.

Separacija varijabli, homogene jednadžbe

Diferencijalne jednadžbe rješavaju se različitim metodama. Mi ćemo raditi samo one najjednostavnije. Većini tih metoda cilj je diferencijalnu jednadžbu na ovaj ili onaj način (npr supstitucijom) svesti na oblik koji zovemo: **diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama**. Taj oblik znamo direktno riješiti. Naime, kod separiranih varijabli imamo situaciju da se jednadžba može zapisati ovako:

$$y' = g(y)f(x)$$

gdje funkcija g ima za varijablu samo y, a funckija f samo x (otuda i naziv "separirane varijable"). Sada $g(y)$ prebacujemo na suprotnu stranu a y' zapišemo kao $\frac{dy}{dx}$ i dobivamo:

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Zadnju jednakost možemo sada integrirati i dobiti rješenje.

Primjer 4 Riješite diferencijalnu jednadžbu: $xyy' = 1 - x^2$.

Rješenje: To je očito slučaj separiranih varijabli, imamo:

$$xyy' = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - x^2}{x}$$

pa je $g(y) = \frac{1}{y}$ a $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$. Prebacujemo g na suprotnu stranu i integriramo:

$$ydy = \frac{1 - x^2}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \int ydy = \int \frac{1 - x^2}{x}dx.$$

Riješimo integrale i dobivamo:

$$\frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Obično rješenja i ostavljamo u ovakvom implicitnom obliku jer je eksplicitni oblik ponekad nemoguće dobiti. Rješenje koje je u implicitnom obliku nazivamo još i **integralom jednadžbe**. Gornja konstanta C upućuje na to da imamo čitavu familiju rješenja ustvari. Njihovi grafovi daju gore spomenute familije integralnih krivulja.

Zadatak 3 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama:

a) $xy' - y = y^3$,

b) $y' = -\frac{y}{x}$,

c) $y' \sin x = y \ln y$,

d) $(\tan x)dy - ydx = 0$.

Kao što vidimo, rješenja diferencijalnih jednadžbi prvog reda nisu jedinstvena već imamo jednu proizvoljnu konstantu (vidi i kod integralnih krivulja, dobijemo čitavu porodicu njih). Ako uzmemo jednadžbu drugog reda, dobit ćemo dvije proizvoljne konstante, za onu trećeg reda tri itd. Stoga rješenja dif. jednadžbe zovemo i **općim rješenjem**. Ako želimo jedinstveno rješenje, moramo dodati neke zahtjeve kao što su vrijednosti rješenja $y = y(x)$ (ili neke njegove derivacije) u nekoj specijalnoj točki. Da bi imali jedinstveno rješenje, tih uvjeta mora biti koliki je stupanj jednadžbe i oni se zovu **početni uvjeti**. Rješenje koje njih zadovoljava zove se **partikularno rješenje**.

Primjer 5 Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće početne uvjete: $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$, $y(0) = 1$.

Rješenje: Rješavamo prvo zadanu diferencijalnu jednadžbu:

$$(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{e^x}{1 + e^x}$$

pa slijedi:

$$\int ydy = \int \frac{e^x}{1 + e^x}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C.$$

Koristimo početni uvjet da odredimo konstantu C:

$$\frac{1}{2} = \frac{y^2(0)}{2} = \ln(1+e^0) + C = \ln 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} - \ln 2$$

i traženo partikularno rješenje je:

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Zadatak 4 Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće početne uvjete:

a) $(xy^2+x)dx + (x^2y-y)dy = 0, \;\; y(0) = 1,$

b) $y' \sin x = y \ln y, \;\; y(\frac{\pi}{2}) = 1,$

c) $y' = -\frac{y}{x}, \;\; y(1) = 2.$

Prijeđimo sada na novu grupu jednadžbi kao primjer jednadžbi koje se jednostavnom supstitucijom svode na jednandžbe sa separiranim varijablama: **homogene diferencijalne jednadžbe**. To su one jednadžbe koje možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

Supstitucija je $y = u \cdot x$ gdje je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija i onda imamo $y' = u' \cdot x + u$.

Primjer 6 Nađite opće rješenje jednadžbe $y' = \frac{y}{x} - 1$.

Rješenje: Očito je riječ o homogenoj jednadžbi (2) gdje je $f(t) = t - 1$. Uvodimo supstituciju $y = ux$ i dobivamo:

$$u' \cdot x + u = u - 1 \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{1}{x}$$

odnosno

$$\int du = -\int \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow u = -\ln x + \ln C.$$

Sada je $y = u \cdot x = (-\ln x + \ln C)x = x \ln \frac{C}{x}$.

Primjer 7 Za jednadžbu $(x^2+y^2)dx = 2xydy$ nađite porodicu integralnih krivulja i izdvojite one krivulje koje prolaze kroz točku $(4,0)$ odnosno $(1,1)$.

Rješenje: Imamo:

$$(x^2+y^2)dx = 2xydy \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

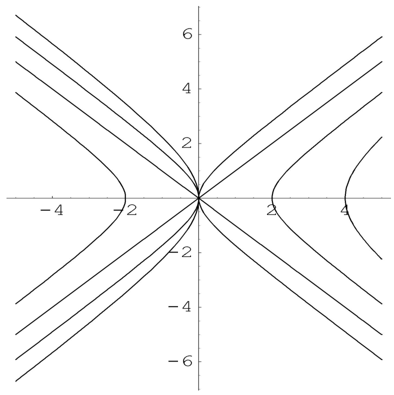
To je homogena jednadžba (2) za $f(t) = \frac{1}{2}(t^{-1} + t)$. Supstitucija $y = u \cdot x$ nam daje:

$$u' \cdot x + u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + u\right) \quad \Rightarrow \quad u' \cdot x = \frac{1}{2u} - \frac{1}{2}u \quad \Rightarrow \quad u' \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-u^2}{u}.$$

Stoga imamo:

$$\int \frac{u}{1-u^2}du = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln(1-u^2) = \frac{1}{2}\ln x - \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln(1-u^2) = -\ln(x) + \ln C$$

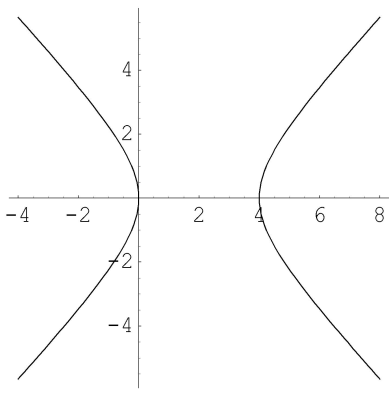
pa je $1-\frac{C}{x} = u^2$ što daje: $\frac{y^2}{x^2} = 1-\frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 - Cx$. Jer je C proizvoljna konstanta, možemo to zapisati i ovako: $y^2 = x^2 - 2Cx \quad \Rightarrow \quad (x-C)^2 - y^2 = C^2$. Integralne krivulje su očito hiperbole:



Nađimo sada integralnu krivulju koja prolazi točkom $(4,0)$. To je ustvari graf rješenjak koje zadovoljava početni uvjet $y(4) = 0$. Kad to uvrstimo u opće rješenje dobivamo:

$$(4-C)^2 - y^2(4) = C^2 \quad \Rightarrow \quad (4-C)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad 16 - 8C = 0$$

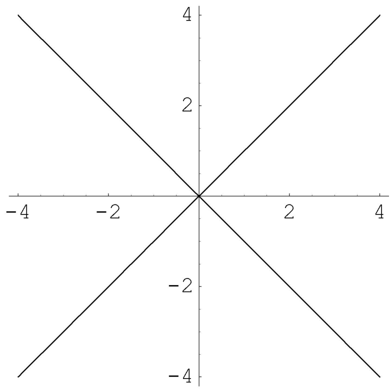
što znači da je $C = 2$, odnosno riječ je o hiperboli $(x-2)^2 - y^2 = 4$:



Drugi početni uvjet nam daje $y(1) = 1$ pa za konstantu C dobivamo:

$$(1-C)^2 - y^2(1) = C^2 \quad \Rightarrow \quad (1-C)^2 - 1 = C^2$$

iz čega slijedi $C = 0$. Ovaj put dobivamo $x^2 - y^2 = 0$ degeneriranu hiperbolu, što su ustvari pravci $y = \pm x$:



Zadatak 5 Integrirajte diferencijalne jednadžbe:

a) $y' = -\frac{x+y}{x}$,

b) $(x-y)ydx - x^2dy = 0$,

c) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$,

d) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$.

Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Diferencijalnu jednadžbu oblika:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{3}$$

nazivamo linearnom (jer sadrži samo y i y' a ne i neke druge članove kao npr y^2 ili $\sin y$). Da bi njih riješili koristit ćemo novu metodu koju nazivamo **metoda varijacije konstanti**. Ona se bazira na sljedećem:

1) riješimo prvo pripadnu homogenu jednadžbu odnosno

$$y' + P(x)y = 0.$$

Kao što vidimo, to je slučaj varijable sa separiranim varijablama pa dobivamo

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\int P(x)dx + \ln C.$$

Stoga je rješenje homognene jednadžbe:

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)dy}. \tag{4}$$

2) Rješenju homogene jednadžbe moramo nekako dati slobodu mijenjanja da ga možemo prilagoditi nehomogenoj jednadžbi. Pošto je jedino C u (4) proizvoljan, od njega napravimo funkciju $C(x)$ pa ćemo rješenje nehomogene tražiti u obliku $y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$. Želimo da ono zadovoljava (3) pa nam treba i njegova derivacija:

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Uvrstimo dobiveno u (3) i imamo:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

i iz toga lako izračunamo integriranjem traženi $C(x)$ koji potom uvrstimo u $y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ i dobijemo rješenje nehomogene jednadžbe.

Primjer 8 Nađite opći integral jednadžbe $y' - \frac{y}{x} = x$.

Rješenje: Ovdje je očito $P(x) = -\frac{1}{x}$ a $Q(x) = x$. Sprovodimo gornji postupak:

1) pripadna homogena jednadžba je:

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

što daje

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln x + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot x.$$

2) konstanta C postaje funkcija pa rješenje nehomogene tražimo u obliku $y = C(x)x$. Deriviranje daje $y' = C'(x)x + C(x)$ pa iz uvrštavanja y i y' u $y' - \frac{y}{x} = x$ dobivamo:

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x \quad \Rightarrow \quad C'(x)x = x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 1$$

i očito je $C(x) = x + D$ pa je konačno rješenje $y = x(x + D)$.

Primjer 9 Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće uvjete: $xy' + y - e^x = 0, \ \ y(a) = b$.

Rješenje: Prvo jednadžbu prebacujemo u oblik (3) da prepoznamo $P(x)$ i $Q(x)$:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x} \quad \Rightarrow \quad P(x) = \frac{1}{x}, \ Q(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Sada je pripadna homogena jednadžba $y' + \frac{y}{x} = 0$ i njeno rješenje je:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\ln x + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x}.$$

Prema tome, rješenje nehomogene tražimo u obliku: $y = \frac{C(x)}{x}$ i onda je $y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$. Uvrštavamo to u početnu jednadžbu i slijedi:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{e^x}{x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = e^x$$

pa je konačno opće rješenje $y = \frac{e^x + D}{x}$. Ostaje naći partikularno tj. odrediti konstantu D iz uvjeta $y(a) = b$. Imamo

$$b = y(a) = \frac{e^a + D}{a} \quad \Rightarrow \quad D = ab - e^a$$

i partikularno rješenje je $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$.

Zadatak 6 Nađite opća rješenja jednadžbi:

1) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$,

2) $y' - y \tan x = \cos x$,

3) $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x$.

Zadatak 7 Nađite partikularna rješenja jednadžbi koja zadovoljavaju navedeni uvjet:

1) $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x, \;\; y(0) = 0$,

2) $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}, \;\; y(0) = 0$.